МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО.

7 класс. Теория чисел–1. 29 мая 2009.

1. На доске были написаны два натуральных числа отличающихся на 3. Время от времени Вася подходила к доске и делила на одно из написанных на ней чисел либо на 2, либо на 3 (результат всегда оказывался целым). Через некоторое время на доске оказались два одинаковых числа. Какие?

2. Произведение натуральных чисел x и y равно 2009^{2010}. Докажите, что $x+y$ не делится на 2008.

3. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляют какую-нибудь его ненулевую цифру. Докажите, что когда-нибудь на доске бесконечно много раз появится четное число.

4. На доске написаны числа от 1 до n. Разрешается стереть с доски любые два числа a и b и написать на их месте одно из чисел $a+b$, $a-5b$ и $7a-11b$. При каких n можно добиться того, чтобы на доске осталось только число 0?

5. Сколько существует пятизначных чисел, кратных 101 и одинаково читающихся слева направо и справа налево?

6. Найдите все простые числа p, q и r такие, что $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$.

7. Докажите, что каждое натуральное число можно записать в виде $\frac{mn+1}{m+n}$ с натуральными m и n.

8. Четыре из девяти разных натуральных чисел покрасили в синий цвет, а остальные — в красный. Затем подсчитали все 20 результатов деления синего числа на красное. Какое наименьшее количество разных результатов могло получиться?

9. Сколькими способами из чисел от 1 до 223 можно выбрать два таких числа x и y, чтобы x^2-y^2-1 делилось на 223?